

## Aufgabenkatalog Analysis – Sommersemester 2019

### Aufgaben zum Thema **Absolutbetrag**

DR. ANTON MALEVICH, LEONARD BECHTEL, JULIAN MAAS

#### **Aufgabe 1** (1) *Betragsgleichungen*

Geben Sie alle reellen Lösungen folgender Betragsgleichungen an:

- a)  $|2x + 5| = 7$ ,                      f)  $|3x + 6| - 2x = -5$ ,                      i)  $|x + 1| + 5 = |2x - 4|$ ,  
b)  $x + |x - 1| = 3$ ,  
c)  $|3x - 5| + 2x = 10$ ,                      g)  $\frac{|x - 4|}{x + 2} = \frac{x - 1}{x + 7}$ ,                      j)  $|x - 3| - |x - 5| = 2$ ,  
d)  $2x - |3 - x| = 18$ ,                      k)  $|x - 1| + |x + 5| = 6$ ,  
e)  $2x + |2x + 4| = -4$ ,                      h)  $\frac{x - 1}{x - 4} = \frac{|x - 5|}{x - 8}$ ,                      l)  $||x - 1| - 4| = 4$ .

#### **Aufgabe 2** (2) *Betragsungleichungen I*

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen folgender Betragsungleichungen:

- a)  $2 + |x + 3| < 3$ ,                      c)  $5 - 3 \cdot |x - 6| \leq 3x - 7$ ,                      e)  $||x - 5| - 3| \leq 4$ ,  
b)  $x - |2x - 12| \geq 0$ ,                      d)  $|x + 1| - |2x - 6| \leq 10$ ,                      f)  $x - |2x + 4| > 1 - |x - 2|$ .

#### **Aufgabe 3** (4) *Betragsungleichungen II*

Es sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper.

Beweisen Sie, dass für alle  $x, y, z \in \mathbb{K}$  gilt:

$$|x| + |y| + |z| - |x + y| - |y + z| - |z + x| + |x + y + z| \geq 0$$

#### **Aufgabe 4** (2) *Eigenschaften Betrag*

Zeigen Sie, dass für beliebige  $x, y \in \mathbb{R}$  der Absolutbetrag folgende Eigenschaften hat:

- a)  $|x| \geq 0$ , wobei  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,                      d)  $||x|| = |x|$ ,  
b)  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ ,                      e)  $x^2 = a \Leftrightarrow |x| = \sqrt{a}$   
c)  $|-x| = |x|$ ,                      wobei  $a \in \mathbb{R}$  fest.

#### **Aufgabe 5** (3) *Inverse Dreiecksungleichung*

Beweisen Sie für beliebige reelle Zahlen  $x, y \in \mathbb{R}$  folgende Ungleichungen:

- a)  $|x| - |y| \leq |x + y|$ ,                      b)  $||x| - |y|| \leq |x| + |y|$ ,                      c)  $||x| - |y|| \leq |x - y|$ ,

#### **Aufgabe 6** (2) Skizzieren Sie Graphen folgender Funktionen.

- a)  $y = |x - 1|$ ,                      f)  $y = \text{sign } x^2$ ,  
b)  $y = |x + 2|$ ,                      g)  $y = \text{sign}(x^2 - 1)$ ,  
c)  $y = |x + 1| + |x - 1|$ ,                      h)  $y = \text{sign}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$ ,  
d)  $y = \frac{1}{2}(|x + 1| - |x - 1|)$ ,                      i)  $y = \text{sign}(x^3 - 4x)$ ,  
e)  $y = \text{sign } x - \frac{1}{2}(|x + 1| - |x - 1|)$ ,                      j)  $y = |x^2 - x - 2|$ .